ASSET PRICING - PARTIE I
EXERCICES

MASTER 104
UNIVERSITÉ PARIS-DAUPHINE

Fabrice Riva

Année universitaire 2015-16

Exercice 1

On considère un marché sur lequel s'échangent un actif sans risque dont le taux de rentabilité est noté R_0, et n actifs risqués dont la matrice de variances-covariances est notée V et le vecteur des rentabilités espérées R. On forme un portefeuille faisable p qui combine actif sans risque et actifs risqués. On note w le vecteur de poids des actifs risqués dans le portefeuille p

Questions

1. Comment s'exprime la variance du portefeuille p ?
2. Comment s'exprime l'espérance du portefeuille p, sachant que p doit être faisable ?
3. Montrer que p est de variance minimale si w s'exprime :

$$w = \frac{V^{-1}r}{r'V^{-1}r} r_p$$

   où r désigne le vecteur des rentabilités espérées des n actifs en excès de R_0
4. Quelle relation vérifie le vecteur de poids du portefeuille de tangence ? En déduire l'expression de r_T, l'espérance de sa rentabilité espérée en excès du taux sans risque, ainsi que l'expression de σ_T^2, sa variance.
5. Comment s'exprime le ratio r_T/σ_T ?

Exercice 2

On considère les 6 premiers titres du fichier relatif aux taux de rentabilité quotidiens des actions du CAC 40, ainsi que les taux de rentabilité correspondants du CAC. Outre les valeurs des taux de rentabilité aux différentes dates, vous aurez également besoin du vecteur des taux de rentabilité moyen des 6 titres et de leur matrice de variances-covariances. [1]

1. Le vecteur des rentabilités moyennes et la matrice de variances-covariances se trouvent dans la feuille "μ et V" du classeur.

Questions

1. Calculez le bêta de chacun des 6 titres.
2. Régressez le vecteur des taux de rentabilité moyens des 6 titres contre leur bêtas respectifs. Combien vaut le R^2 de la régression ? Quelles sont les implications pour le CAPM ?
3. Déterminez le vecteur de poids du portefeuille p de variance minimale dont la rentabilité espérée quotidienne est égale à 0.1%. Calculez son taux de rentabilité à chacune des dates dont vous disposez.
4. Calculez le bêta de chacun des 6 titres par rapport au portefeuille p, puis régressez le vecteur des taux de rentabilité moyens des 6 titres contre leurs nouveaux bêtas. Combien vaut le R^2 ? Que signifie ce résultat ? Etait-il attendu ? Pourquoi ?
5. Quelles sont les conséquences du résultat mis en évidence pour les tests du CAPM ?

Exercice 3

Un market maker est un intermédiaire qui doit coter à chaque instant le prix d'achat et le prix de vente d'un actif dont il assure la liquidité.

On considère un market maker qui dispose d'un montant de cash c et d'une position I (en nombre de titres) sur un actif j, avec $I > 0$ ($I < 0$) si le market maker est long (court) sur l'actif j. A la date 0, ce market maker est contacté par un investisseur qui souhaite échanger q_0 titres, où $q_0 > 0$ désigne un achat de l'investisseur et $q_0 < 0$ une vente. La valeur de l'actif j à la date 1 correspond à la réalisation d'une variable aléatoire $\tilde{v}$, distribuée selon une loi normale, d'espérance μ et de variance σ^2. Le cash rapporte le taux sans risque r

Questions

1. Quelle est l'expression du stock de titres du market maker suite à l'échange avec l'investisseur ?
2. Quelle est l'expression de la richesse aléatoire $\tilde{W}$ du market maker à la date 1 sachant que l'échange de la date 0 se fait au prix unitaire p_0
3. Donnez l'expression de l'espérance et de la variance de la richesse du market.
4. Sachant que le market maker est caractérisé par une fonction d'utilité CARA avec un coefficient d'aversion absolu pour le risque noté a, quel prix p_0 lui permet de maximiser son utilité espérée ? Commentez l'expression de p_0 obtenue.

Exercice 4

Un investisseur dispose à la date 0 d'un montant de cash noté c. Il investit ce cash en proportion $(1-q)$ dans un actif sans risque rapportant le taux r_f, et une proportion q dans un portefeuille risqué dont le taux de rentabilité aléatoire à la date 1 correspondant à la réalisation d'une variable aléatoire normale r d'espérance μ et de variance σ^2.[2]

2. Les taux de rentabilité dont il est ici question sont de l'ordre de 0.05 et non 1.05.

Questions

1. Donnez l'expression de la richesse aléatoire w de l'investisseur à la date 1.
2. Donnez l'expression de l'espérance et de la variance de w.
3. En supposant que l'investisseur est caractérisé par une fonction d'utilité $u(w) = -e^{-aw}$, donnez l'expression de q qui maximise l'utilité espérée de l'investisseur.
4. Commentez l'expression de q obtenue. Pourquoi la proportion investie dans l'actif risqué décroît-elle avec c ?

Exercice 5

L'objectif de cet exercice est d'établir l'expression de la variance du taux de rentabilité anormal d'un actif à une date τ de la fenêtre d'événement lorsque les rentabilités anormales sont calculées en utilisant le modèle de marché, soit :

$$v_{i,\tau} = \sigma^2(\epsilon_i)\left\{1 + \frac{1}{L_1} + \frac{(R_{m,\tau} - \bar{R}_m)^2}{\sum_{t=T_0}^{T_1}(R_{m,t} - \bar{R}_m)^2}\right\} \tag{1}$$

Questions

1. Montrez que $E_i \equiv E[\hat{\epsilon}_i^\star | X_i^\star] = 0$
2. Montrez que $V_i \equiv Var[\hat{\epsilon}_i^\star | X_i^\star] = \sigma^2(\epsilon_i)\mathbf{I} + \sigma^2(\epsilon_i)[\mathbf{X}_i^\star(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i^{\star\prime}]$
3. Montrez que dans le cas du modèle de marché l'expression de V_i à une date τ de la fenêtre d'événement est effectivement donnée par la relation (1).